

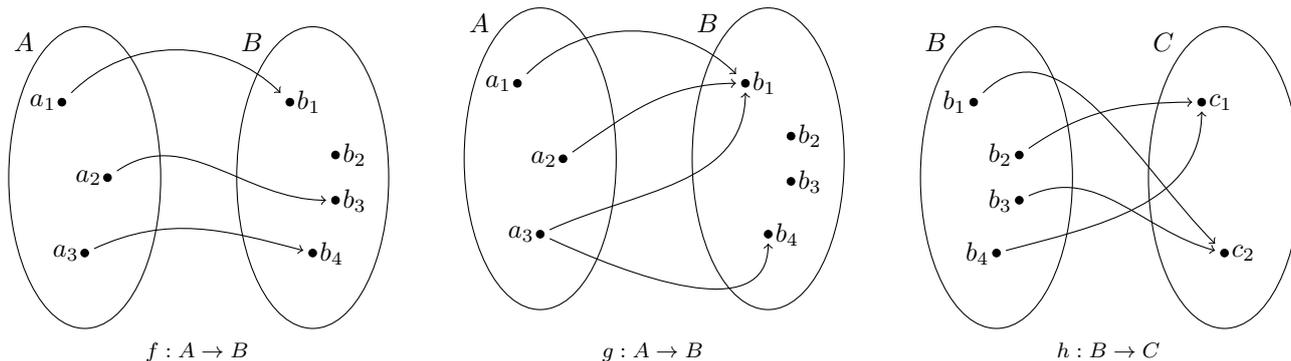
## Matematica generale: compito del 19 dicembre 2012

Chi deve fare l'esame per meno di 9 CFU chiedi al docente prima di iniziare il compito.

Gli esercizi 1 e 2 vanno svolti *perfettamente* prima di passare agli altri.

In presenza di errori negli esercizi 1 e/o 2 il compito verrà considerato insufficiente.

1. Siano  $f$ ,  $g$  e  $h$  come nella figura che segue:



- Dire quali tra  $f$ ,  $g$  e  $h$  non sono funzioni, e perché.
- Per ciascuna funzione, dire quali sono il dominio e l'immagine.
- Per ciascuna funzione, dire se è iniettiva. Giustificare la risposta.
- Si può fare la composizione  $h \circ f$  tra  $f$  ed  $h$ ? Se sì, descriverla con un disegno come in figura.

2. Risolvere la disequazione

$$\frac{1}{2-x} - \frac{3x}{2x+1} \geq -1.$$

3. Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 1 + \ln\left(\frac{1}{2x}\right) & \text{se } x > 0, \\ -x^2 + 1 & \text{se } x \leq 0, \end{cases}$$

determinarne

- il dominio;
  - il segno;
  - gli eventuali asintoti;
  - i punti in cui  $f$  è continua e i punti in cui  $f$  non è continua;
  - gli intervalli di crescita e decrescenza;
  - i punti in cui  $f$  è derivabile e i punti in cui  $f$  non è derivabile;
  - eventuali punti di massimo e minimo, sia locali che globali;
  - gli intervalli di convessità e concavità, e gli eventuali flessi;
  - il grafico.
4. Calcolare l'area della regione di piano delimitata dal grafico della funzione  $f(x)$  dell'esercizio 3 e dall'asse delle  $x$ , in corrispondenza dell'intervallo  $(1, e)$ .

5. Calcolare l'integrale

$$\int_2^{+\infty} \frac{x}{(\sqrt{x^2-1})^3} dx.$$

6. Dire, giustificando la risposta, se le serie

$$\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{3^n}{2^{3n}} \quad \text{e} \quad \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{e^{n^2-1}}{e^{3-2n^2}}$$

convergono. Se sì, calcolarne la somma.

7. Date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- calcolare il determinante  $\det(A)$  di  $A$ ;
- risolvere il sistema  $A \cdot X = B$ ;
- calcolare la traccia  $\text{tr}(A)$  di  $A$ .

## Matematica generale: compito del 19 dicembre 2012

Chi deve fare l'esame per meno di 9 CFU chiede al docente prima di iniziare il compito.

Gli esercizi 1 e 2 vanno svolti *perfettamente* prima di passare agli altri.

In presenza di errori negli esercizi 1 e/o 2 il compito verrà considerato insufficiente.

1. Denotando con  $I(x_0, r)$  l'intorno sulla retta reale di centro  $x_0 \in \mathbb{R}$  e raggio  $r \geq 0$ , si considerino i 4 insiemi

$$A = \{x \in \mathbb{R} : \ln(x+2) \in \mathbb{R}\}, \quad B = \{x \in \mathbb{R} : |3x-2| \leq 4\}, \quad C = I(-1, 4), \quad D = \{n \in \mathbb{N} : n-3 \leq 0\}.$$

- (a) Dire, motivando le risposte, se  $C \subseteq A$  e se  $B \subseteq C$ .  
(b) Determinare  $A \cup B$  e  $C \cup D$ .  
(c) Determinare  $A \cap B$  e  $C \cap D$ .

2. Risolvere la disequazione

$$\frac{3-x}{2-x} - \frac{x-1}{2x+1} \leq 1.$$

3. Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{4x}{2x^2+1} - 1 & \text{se } x \geq -1, \\ e^{-x} & \text{se } x < -1, \end{cases}$$

determinarne

- (a) il dominio;  
(b) il segno;  
(c) gli eventuali asintoti;  
(d) i punti in cui  $f$  è continua e i punti in cui  $f$  non è continua;  
(e) gli intervalli di crescita e decrescenza;  
(f) i punti in cui  $f$  è derivabile e i punti in cui  $f$  non è derivabile;  
(g) eventuali punti di massimo e minimo, sia locali che globali;  
(h) gli intervalli di convessità e concavità, e gli eventuali flessi;  
(i) il grafico.
4. Calcolare l'area della regione di piano delimitata dal grafico della funzione  $f(x)$  dell'esercizio 3 e dall'asse delle  $x$ , in corrispondenza dell'intervallo  $(0, 1)$ .

5. Calcolare l'integrale

$$\int_0^1 x(1 - \ln(x)) dx.$$

6. Dire, giustificando la risposta, se le serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \ln\left(\frac{n^2+n+1}{1+2n^2}\right) \quad \text{e} \quad \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{2^n}{3^{2n}}$$

convergono. Se sì, calcolarne la somma.

7. Date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

- (a) calcolare il rango  $\text{rk}(A)$  di  $A$ ;  
(b) risolvere il sistema  $A \cdot X = B$ ;  
(c) dire se  $A$  è simmetrica.